EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

X — 15 JULI 1965

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

INHOUD VAN DE 40STE JAARGANG

ARTIKELEN EN VOORDRACHTEN

KORRELS

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

DIVERSEN

BESPREKING EN AANKONDIGING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN

Besproken boeken

De 40ste jaargang stond onder redactie van Dr. JOH. H. WANSINK, Drs. A. M. KOLDIJK, Dr. W. A. M. BURGERS, Dr. P. M. VAN HIELE, G. KROOSHOF, Dr. D. N. VAN DER NEUT en Dr. P. G. J. VREDENDUIN.

IN MEMORIAM

PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS

28 oktober 1892 — 18 mei 1965

Elders zullen ongetwijfeld de verdiensten van Dijksterhuis als historicus van de natuurwetenschappen en van de wiskunde worden uiteengezet, hier past het ons stil te staan bij zijn betekenis voor het wiskunde-onderwijs op de diverse schooltypen van v.h.m.o.

Zijn ideeën over de betekenis die goed gegeven wiskunde-onderwijs kan hebben bij onze pogingen de leerlingen te dwingen tot zelfstandige, geestelijke arbeid en tot een correct taalgebruik, zijn gefundeerde beschouwingen over nieuwe programma's voor wiskunde in het v.h.m.o., zijn pleidooien enerzijds voor een erkenning van de wiskunde als onmisbaar bestanddeel van een voorbereiding tot universitaire studie onverschillig in welke faculteit ook, anderzijds voor een goede opleiding van de wiskunde-leraar, zijn neergelegd in tal van rapporten van commissies waarvan Dijksterhuis deel uitmaakte, in verslagen van door hem gehouden redevoeringen en in verdere artikelen van zijn hand.

Dijksterhuis heeft mede zijn stempel gedrukt op het karakter van ons didactisch tijdschrift in zijn eerste periode. De eerste jaargang van Euclides opende met een artikel van hem getiteld „*Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?*”, waarin hij polemiseerde met Mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa. Dit eerste artikel is in de loop van de veertig jaren dat Dijksterhuis medewerker van ons tijdschrift was, door dozijnen andere gevolgd.

Wie ooit een rede van Dijksterhuis mocht beluisteren, zal blijvend onder de indruk zijn gekomen van zijn ongemeen redenaarstalent, van zijn volmaakte taalbeheersing, van zijn steeds imponerende voordracht, van de conscientieuze documentering van elke van zijn beweringen en hij zal zich verwonderd hebben afgevraagd, hoe het hem mogelijk was zo'n voordracht te houden zonder de steun van enig geschreven woord.

Dijksterhuis maakte deel uit van de Commissie die op verzoek van het College van Inspecteurs in 1926 een onderzoek moest instellen en voorstellen moest doen die zouden kunnen leiden tot verbetering van het wiskunde-onderwijs op de hogereburgerscholen. Deze com-

missie die naar haar voorzitter en naar haar secretaris bekend is geworden onder de naam „Commissie Beth-Dijksterhuis" heeft het getij niet mee gehad. Van officiële zijde is nimmer op de ingediende voorstellen gereageerd tot 11 jaar later bij de programmaherziening voor de h.b.s. van 1937 een klein deel van de wensen van de Commissie zou worden verwezenlijkt.

Het zal ons thans niet meer verwonderen, dat Dijksterhuis bij herhaling de betekenis van de geschiedenis van de wiskunde voor leerling en leraar naar voren heeft gebracht. Dat bij de jongste herziening van het wiskundeprogramma kennis van enige hoofdstukken van de geschiedenis van de wiskunde als facultatief onderdeel van het eindexamenprogramma van de α-leerlingen van het gymnasium werd opgenomen, ligt geheel in de lijn van de ideeën van Dijksterhuis, die hoopte op deze wijze voor de desbetreffende leerlingen tot een harmonischer geheel van de leerstof te geraken. Voor de leraren zelf beschouwde Dijksterhuis kennis van de historische ontwikkeling van de wiskunde als een beslist onmisbaar bestanddeel van hun studie. Zijn ideeën hierover heeft hij uiteengezet in een van zijn laatste publicaties: „*The place of history in the training of a mathematics teacher,*" opgenomen in een rapport van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde van het jaar 1962.

Dijksterhuis heeft steeds gepleit voor „epistemisch onderwijs"; we gebruiken hier een door hemzelf ingevoerde term om een onderwijs aan te duiden dat diametraal staat tegenover „dril". Hij zag de taak van de docent tegenover de wetenschap als een viervoudige: de leraar kan optreden als zelfstandig beoefenaar van de wetenschap, hij kan zijn een belangstellend toeschouwer, hij kan de taak vervullen van middelaar en die van conservator.

Dijksterhuis is het grootste deel van zijn leven wiskundeleraar geweest, eerst te Groningen, daarna te Tilburg. Gezien zijn wetenschappelijke gaven is hij eerst te laat tot het hoogleraarsambt geroepen. In 1930 werd hij benoemd tot privaat-docent aan de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam, in 1953 en 1954 werd hij buitengewoon hoogleraar te Utrecht en te Leiden, in 1954 werd hij te Utrecht gewoon hoogleraar.

In 1952 ontving hij de P. C. Hooftprijs voor letterkunde naar aanleiding van zijn in 1951 verschenen werk „*De mechanisering van het wereldbeeld*", een werk dat ook in het Frans en in het Engels is vertaald. Dat deze prijs werd toegekend voor een wetenschappelijk werk over een natuurwetenschappelijk thema, is stellig te beschouwen als een uniek gebeuren. Kwaliteiten, die men traditioneel als α en β-kwaliteiten pleegt te onderscheiden, vond men bij

Dijksterhuis tot een harmonische synthese verenigd. In dit verband mogen we misschien opmerken, dat Dijksterhuis ook een twintigtal jaren lang redacteur van „de Gids" is geweest.

Door een ernstige ziekte getroffen heeft Dijksterhuis bij het bereiken van de zeventigjarige leeftijd slechts in stilte afscheid kunnen nemen van zijn werk als hoogleraar.

De Nederlandse wiskunde-leraar zal Dijksterhuis blijven gedenken als een universele geest, wie het belang van het Nederlandse wiskunde-onderwijs zeer ter harte ging, en die ter bevordering van dat onderwijs, teleurstelling ten spijt, een leven lang zijn beste krachten heeft gegeven.

JOH. H. WANSINK

BOEKBESPREKING

Dutch classics on history of science dl. X. E. de Decker, *Tweede deel van de Nieuvwe Tel-konst*, 1627. Facsimile of the only copy extant with an introduction by A. J. E. M. Smeur, with two plates. Im. vellum boards, 23 pp. prijs *f* 45.—. Uitgave van de Graaf-Nieuwkoop.

Van deze fraaie uitgave verschenen slechts 500 exemplaren. De inleiding bestaat uit 13 bladzijden met historische bijzonderheden o.a. over E. de Decker, John Napier, H. Briggs, A. Vlacq e.a.

Het enige bekende exemplaar van deze „Telkonst" uit 1627 werd ontdekt door Prof. M. van Haaften in de bibliotheek van de levensverzekeringmaatschappij „Utrecht" in 1920.

Na een uitvoerige literatuurlijst volgt dan in facsimile: titelblad en voorbericht met de eerste hoofdstukken, uitgewerkte vraagstukken, waarna twee bladzijden van de logaritmentafel.

Deze fraaie uitgave kan ik belangstellenden aanbevelen.

Burgers

Prof. dr. H. Theil, drs J. C. G. Boot, drs. T. Kloek, *Voorspellen en beslissen*, Uitgave Markaboeken, Utrecht-Antwerpen.

Deze pocket-editie van 370 bladzijden behandelt op zeer duidelijke en prettige wijze, de wiskundige aanpak van problemen uit de kwantitatieve economie en operationele research.

Als men voorbeelden zoekt van een praktische toepassing van de elementaire wiskunde, dan moet men niet nalaten, dit boekje aan te schaffen.

Burgers

INLEIDING TOT DE THEORIE DER DISTRIBUTIES II [1])

door

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN

Groningen

11. *Het tensorprodukt van distributies.*

We hebben reeds opgemerkt, dat de vermenigvuldiging van twee distributies in het algemeen aanleiding geeft tot onoverkomelijke moeilijkheden. Men kan echter een verwant procédé definiëren, dat in vele gevallen zeer nuttig is.

We denken ons nu gegeven een ruimte $\Phi_{x,y}$ van toetsfuncties $\varphi(x, y)$ in twee variabelen. Deze functies zijn willekeurig vaak differentieerbaar en gelijk aan nul buiten een open rechthoek. Bij vaste y of vaste x zijn dan de functies toetsfuncties in één variabele, resp. behorende tot een ruimte Φ_x of ruimte Φ_y.

Zij $g(y)$ een distributie over Φ_y; dan heeft voor iedere x de uitdrukking

$$\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \tag{11-1}$$

betekenis. We beschouwen nu het systeem van functies

$$\frac{\varphi(x+\lambda, y) - \varphi(x, y)}{\lambda} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \tag{11-2}$$

bij vaste x en voldoend kleine λ. Dan zijn ze als functies van y alle buiten hetzelfde interval gelijk aan nul. Voor (11–2) kan men schrijven

$$\frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda}(u-x)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\theta, y)\,\mathrm{d}u.$$

De functies $\partial^2\varphi/\partial x^2(\theta, y)$ zijn in y uniform begrensd en men bewijst als in no. 8 dat (11–2) voor $\lambda \to 0$ uniform naar nul gaat in Φ_y. Daar men hetzelfde betoog kan toepassen op de afgeleiden

$$\frac{\partial^k \varphi(x, y)}{\partial y^k}$$

[1]) Deel I, werd afgedrukt in Euclides **40**, blz. 257 e.v.

convergeert

$$\frac{\varphi(x+\lambda,\, y)-\varphi(x,\, y)}{\lambda}$$

voor $\lambda \to 0$ sterk naar $\partial\varphi(x, y)/\partial x$, en dus

$$(11\text{–}3)\qquad \left\langle g(y),\ \frac{\varphi(x+\lambda, y)-\varphi(x, y)}{\lambda}\right\rangle \to \left\langle g(y),\ \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\right\rangle,$$

wegens de continuïteit van $g(y)$. Daarmee is bewezen, dat (11–1) naar x differentieerbaar is. Herhalen we het betoog voor het laatste lid van (11–3), dan zien we dat (11–1) zelfs willekeurig vaak differentieerbaar is. Deze functie is stellig finiet, en dus een toetsfunctie in Φ_x. Het heeft daarom zin om te vormen

$$(11\text{–}4)\qquad \langle f(x),\ \langle g(y),\ \varphi(x, y)\rangle\rangle$$

waarmee een lineaire functionaal over $\Phi_{x,y}$ is gedefinieerd, die het *tensorprodukt* van f en g heet. We duiden dit produkt aan met

$$(11\text{–}5)\qquad f(x)\times g(y).$$

Nemen we in het bijzonder voor $\varphi(x, y)$ het produkt van de functie $\alpha(x)$ en $\beta(y)$, die ieder afzonderlijk toetsfuncties zijn resp. in Φ_x en Φ_y, dan vinden we voor (11–4)

$$(11\text{–}6)\qquad \langle f(x),\ \langle g(y),\ \alpha(x)\beta(y)\rangle\rangle = \langle f(x),\ \alpha(x)\rangle\langle g(y),\ \beta(y)\rangle.$$

We bewijzen nu

De functionaal $f \times g$ is nul, wanneer de functionaal aan de functies $\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ de waarde nul geeft.

Dan moet dus

$$\langle f, \alpha\rangle\langle g, \beta\rangle = 0$$

zijn voor alle α en β. Is bijvoorbeeld $\langle g, \beta\rangle \neq 0$ voor een bepaalde β, dan is $\langle f, \alpha\rangle = 0$ voor alle α dus $f = 0$. Uit (11–4) volgt dan dat ook $f \times g$ gelijk is aan nul.

Een direct gevolg is

Het tensorprodukt is commutatief.

Dit is niet triviaal, want de definitie (11–4) is niet symmetrisch in f en g. Maar uit (11–6) blijkt, dat het produkt symmetrisch is voor de functies $\alpha\beta$, en, gelijk we zagen, dit is al voldoende.

Het tensorprodukt is voor ons geen hoofddoel, maar een hulpmiddel om te komen tot een proces voor distributies over functies van één variabele, dat de vermenigvuldiging kan vervangen.

12. *Convolutie*

Laat wederom f en g distributies zijn over functies van een ruimte Φ_x. We kunnen ze ook opvatten als distributies over ruimten Φ_u en Φ_v, doordat we afspreken

$$\langle f(u),\ \varphi(u)\rangle = \langle f(x),\ \varphi(x)\rangle$$

en

$$\langle g(v),\ \varphi(v)\rangle = \langle g(x),\ \varphi(x)\rangle.$$

Het tensorprodukt $f \times g$ bestaat dus steeds als een lineaire functionaal over de toetsfuncties van een ruimte $\Phi_{u,v}$.

Zij $\varphi(x)$ een toetsfunctie van Φ_x. Dan is in het algemeen $\varphi(u+v)$ geen toetsfunctie van $\varphi_{u,v}$, want als $\varphi(c) \neq 0$, dan is ook $\varphi(u+v) \neq 0$ voor alle u en v, die aan $u+v=c$ voldoen. In het $(u,\ v)$-vlak bestrijken deze punten $(u,\ v)$ een strook met eindige breedte, die parallel is met de rechte $u+v=0$, maar zich tot in het oneindige uitstrekt. We kunnen dus in het algemeen aan

$$(12\text{–}1)\qquad \langle f \times g,\ \varphi(u+v)\rangle$$

Het blijkt echter te gelukken, wanneer we aan f en g bepaalde beperkingen opleggen. We zullen in het volgende (behoudens een enkele uitzondering) beperken tot het geval van distributies, die *op de rechterhalfstraal* $x \geqq 0$ *geconcentreerd* zijn, d.w.z. *de distributies zijn nul in ieder interval, dat tot de negatieve x-as behoort.*

Is u voldoend groot, dan kan $\varphi(u+v)$ alleen van nul verschillen in een interval, dat tot de negatieve v-as behoort. Voor een dergelijke waarde van u is dan

$$(12\text{–}2)\qquad \langle g(v),\ \varphi(u+v)\rangle$$

gelijk aan nul. Deze functie is willekeurig vaak differentieerbaar en met betrekking tot $f(u)$ verkeren we in de situatie, die aan het eind van no. 7 onder ogen is gezien. We kunnen daarom ook aan

$$(12\text{–}3)\qquad \langle f(u),\ \langle g(v),\ \varphi(u+v)\rangle\rangle$$

betekenis geven en beschouwen nu deze uitdrukking als de definitie van (12–1). Daarmee is voor elke toetsfunctie φ een lineaire continue functionaal gevonden, die de *convolutie* van f en g heet en geschreven wordt als $f * g$. De waarde toevoeging aan een functie $\varphi(x)$ wordt dus beschreven door

$$(12\text{–}4)\qquad \langle f * g,\ \varphi(x)\rangle = \langle f \times g,\ \varphi(u+v)\rangle$$

In alle gevallen, waarbij men met behoud van het lineaire karakter en de continuïteit aan (12–1) betekenis kan geven is de convolutie

gedefinieerd. Dus stellig in het bovengenoemde geval van op de rechterhalfstraal geconcentreerde functies.

In het geval van de distributie δ kunnen we ons nog op een andere manier redden. Is $g = \delta$, dan luidt (12–3)

$$\langle f, \langle \delta, \varphi(u+v)\rangle\rangle = \langle f, \varphi(u)\rangle$$

Is $f = \delta$, dan hebben we

$$\langle \delta, \langle g, \varphi(u+v)\rangle\rangle = \langle \delta, \psi(u)\rangle,$$

maar $\psi(u)$ is niet altijd finiet. Nemen we echter een willekeurige toetsfunctie $\xi(u)$, met $\xi(0) = 1$, dan hangt $\langle \delta, \xi\psi\rangle = \psi(0)$ niet van ξ af, en ook dan heeft (12–4) zin.

We hadden ook als volgt kunnen redeneren:
Het tensorprodukt $\delta \times f$ is gelijk aan $f \times \delta$, en we kunnen daarom aan $\langle \delta \times f, \varphi(u+v)\rangle$ betekenis geven doordat we f en δ verwisselen. We hebben daarmee reeds bewezen:

De distributie van Dirac is een eenheid voor de convolutie.

(12–5) $$\boxed{f * \delta = \delta * f = f.}$$

Dezelfde argumenten kunnen worden gebruikt voor δ'. Nu is

$$\begin{aligned}\langle f * \delta', \varphi(x)\rangle &= \langle f \times \delta', \varphi(u+v)\rangle = \langle f, \langle \delta', \varphi(u+v)\rangle\rangle \\ &= -\langle f, \varphi'(u)\rangle = \langle f', \varphi(u)\rangle,\end{aligned}$$

dus

(12–6) $$\boxed{f * \delta' = f'}$$

en de uitbreiding tot hogere afgeleiden ligt voor de hand.

De convolutie is commutatief.

(12–7) $$\boxed{f * g = g * f.}$$

Dit betekent, dat als $f * g$ gedefinieerd is, dan ook $g * f$, en beide zijn gelijk. Welnu, heeft (12—1) betekenis, dan mogen we wegens de commutativiteit van het tensorprodukt f en g verwisselen, terwijl $\varphi(u+v)$ bij verwisseling der variabelen niet verandert.

Zijn f en g op de rechterhalfstraal geconcentreerd dan is dit ook het geval met $f * g$.

Neem aan dat $\varphi(x)$ alleen van nul kan verschillen in een interval dat tot de negatieve as behoort. Dan is $\varphi(u+v) \neq 0$ alleen voor $u + v < 0$, dus in een strook, die met het eerste kwadrant in het

(u, v)-vlak niets gemeen heeft. Door een bepaald punt (u_0, v_0) kunnen we twee intervallen leggen, nl. een verticaal met $u = u_0$ vast en v variabel en een horizontaal met $v = v_0$ vast en u variabel. Ten minste een van de intervallen ligt op de negatieve as, omdat de strook in het (u, v)-vlak geen punten bevat van het eerste kwadrant. Dus of wel $\langle g, \varphi(u_0 + v)\rangle = 0$ óf wel $\langle f, \varphi(u + v_0) = 0$, zodat steeds $\langle f * g, \varphi(x)\rangle = 0$.

We kunnen nu bewijzen:

De convolutie is associatief.

(12–8) $$\boxed{(f * g) * h = f * (g * h).}$$

Het bewijs wordt door formeel rekenen gegeven.

$$\begin{aligned} &\langle (f * g) * h, \varphi(x)\rangle = \langle (f * g) \times h, \varphi(x + w)\rangle \\ &= \langle (f * g), \langle h, \varphi(x + w)\rangle\rangle = \langle f \times g, \langle h, \varphi(u + v + w)\rangle\rangle \\ &= \langle f, \langle g, \langle h, \varphi(u + v + w)\rangle\rangle\rangle = \langle f, \langle g \times h, \varphi(u + v + w)\rangle\rangle \\ &= \langle f, \langle g * h, \varphi(u + x)\rangle\rangle = \langle f \times (g * h), \varphi(u + x)\rangle \\ &= \langle f * (g * h), \varphi(x)\rangle, \end{aligned}$$

q.e.d.

In meer algemene gevallen is de bewering niet waar. Tegenvoorbeeld:

$$\begin{aligned} &\delta' * H = \delta, \quad 1 * \delta = 1, \quad \text{dus } 1 * (\delta' * H) = 1, \\ &1 * \delta' = 0, \quad 0 * H = 0, \quad \text{dus } (1 * \delta') * H = 0. \end{aligned}$$

Ten aanzien van de convolutie gedraagt de differentiatie zich eenvoudiger dan ten aanzien van een produkt. Er geldt nl.

(12–9) $$\boxed{(f * g)' = f * g' = f' * g.}$$

Het bewijs verloopt aldus:

$$\begin{aligned} &\langle (f * g)', \varphi(x)\rangle = -\langle f * g, \varphi'(x)\rangle = -\langle f \times g, \varphi'(u + v)\rangle \\ &= -\langle f, \langle g, \varphi'(u + v)\rangle\rangle = \langle f, \langle g', \varphi(u + v)\rangle\rangle \\ &= \langle f \times g', \varphi(u + v)\rangle = \langle f * g', \varphi(x)\rangle. \end{aligned}$$

Door verwisseling van f en g vinden we de tweede uitkomst.

Als afsluiting van de reeks der formele regels bewijzen we nog de continuïteit van de convolutie.

Convergeert f_λ voor $\lambda \to \lambda_0$ zwak naar f, dan convergeert $f_\lambda * g$ zwak naar $f * g$.

We merken op, dat ook f op de halfstraal $x \geqq 0$ is geconcentreerd, want uit $\langle f_\lambda, \varphi\rangle = 0$ volgt $\langle f, \varphi\rangle = 0$. Voorts is

$$\begin{aligned}\langle f_\lambda * g,\ \varphi(x)\rangle &= \langle f_\lambda, \langle g, \varphi(u+v)\rangle\rangle \\ \to \langle f, \langle g, \varphi(u+v)\rangle &= \langle f * g,\ \varphi(x)\rangle,\end{aligned}$$

want we mogen $\langle g,\ \varphi(u+v)\rangle$ door een toetsfunctie vervangen, die de waarden voor f_λ en f niet beïnvloedt.

Een rekenvoorschrift, waarmee de convolutie van twee functies (opgevat als reguliere distributies) is te verkrijgen, vinden we op grond van de volgende overwegingen. Wegens (11–4) is voor de locaal integreerbare functies $f(x)$ en $g(x)$:

$$\begin{aligned}\langle f \times g,\ \varphi(x,\ y)\rangle &= \int f(x)\Big(\int g(y)\varphi(x,\ y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\ &= \iint f(x)g(y)\varphi(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

waarbij de dubbelintegraal kan worden genomen over een rechthoek, waarbuiten $\varphi(x,\ y) = 0$. Voor de convolutie hebben we dan

$$\langle f * g, \varphi(x)\rangle = \iint f(u)g(v)\varphi(u+v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Onderstellen we dat $f = 0$, $g = 0$ voor $x \leqq 0$ dan moet de integraal worden genomen over een eindig gebied, de doorsnede van het eerste kwadrant en een strook parallel met de rechte $u + v = 0$. De substitutitie

$$\begin{aligned}x &= u + v, \quad & v &= x - u, \\ u &= u, & u &= u.\end{aligned}$$

voert de integraal over in

$$\iint f(u)\ g(x-u)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

We merken op dat krachtens onderstelling $f(u) = 0$ voor $u < 0$ en $g(x - u) = 0$ voor $u > x$.
Dus is

$$\langle f * g, \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^x f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

en $f * g$ is de functie

(12–10) $\boxed{f * g = \int_0^x f(u)g(x-u)\ \mathrm{d}u,}$ $\quad x > 0.$

Voorbeelden:

1) $\quad x_+ * x_+ = \int_0^x u(x-u)\,du = x^3 \int_0^1 v(1-v)\,\mathrm{d}v$

zodat

$$x_+ * x_+ = \tfrac{1}{6}x_+{}^3.$$

2) Door differentiatie volgt hieruit

$$x_+ * H = \tfrac{1}{2}x_+{}^2,$$

een resultaat dat natuurlijk ook rechtstreeks direct is te vinden. De convolutie met H heeft blijkbaar het effect van een integratie. Dit is algemeen waar. Immers.

$$f' * H = f * H' = f * \delta = f.$$

Tenslotte berekenen we nog

$$x_+{}^{-1} * x_+$$

Dit kan niet met (12–10) gebeuren, want de integraal is divergent bij $x = 0$. Wel kunnen we berekenen $\log x_+ * x_+$ uit

$$\int_0^x \log u \cdot (x - u)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}x^2 \log x - \tfrac{3}{4}x^2,\ x > 0,$$

zodat

$$\log x_+ * x_+ = \tfrac{1}{2}x^2 \log x_+ - \tfrac{3}{4}\,x_+{}^2$$

Door differentiatie volgt nu

$$x_+{}^{-1} * x_+ = x \log x_+ - x_+.$$

13. *Afgeleiden van willekeurige orde.*

De theorie van de convolutie kan op een grote verscheidenheid van problemen worden toegepast. We willen één probleem op de voorgrond plaatsen, te weten de definitie van de afgeleide, waarvan de orde niet noodzakelijk geheel is. Het is dus de bedoeling betekenis te geven aan een uitdrukking als

$$\text{(13–1)}\qquad \frac{\mathrm{d}^{\sqrt{2}}f}{\mathrm{d}x^{\sqrt{2}}},$$

Hiervoor zijn enige voorbereidingen nodig. We zullen gebruik maken van enkele eenvoudige eigenschappen van de integraal voor de gammafunctie:

$$\text{(13–2)}\qquad \Gamma(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, x^{\lambda-1}\mathrm{d}x,$$

die, gelijk bekend, convergent is voor $\lambda > 0$.

Door partiële integratie vinden we

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\lambda \, dx = - e^{-x} x^\lambda \Big|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda-1} \, dx,$$

dus de functionaalvergelijking

$$\boxed{\Gamma(\lambda + 1) = \lambda \Gamma(\lambda).} \tag{13-3}$$

Nu heeft $\Gamma(\lambda + 1)$ betekenis voor $\lambda > -1$. We kunnen daarom $\Gamma(\lambda)$ voor $\lambda > -1$ definiëren door

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\lambda}, \tag{13-4}$$

mits $\lambda \neq 0$. Aldus voortgaande kan men $\Gamma(\lambda)$ ook definiëren voor alle negatieve waarden van λ, met uitsluiting van $\lambda = -1, -2, \ldots$

Verder herinneren we nog aan een bekend resultaat, nl.

$$\boxed{\int_0^1 x^{\lambda-1} (1 - x)^{\mu-1} \, dx = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)},} \quad \lambda > 0, \ \mu > 0. \tag{13-5}$$

In onze beschouwingen zal een belangrijke rol spelen de functie x_+^λ, gedefinieerd als

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0. \end{cases} \tag{13-6}$$

Is $\lambda > -1$, dan brengt deze functie een reguliere distributie voort, bepaald door

$$\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) \, dx. \tag{13-7}$$

De integraal is bij $x = 0$ nog convergent. De afgeleide van x_+^λ voor $\lambda > 0$ wordt berekend uit

$$- \langle x_+^\lambda, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x) \, dx = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1} \varphi(x) \, dx,$$

dus

$$\boxed{\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1}.} \tag{13-8}$$

Net als bij de gammafunctie kunnen we deze formule gebruiken om x_+^λ te definiëren voor alle negatieve waarden van λ, die verschillend zijn van $-1, -2, \ldots$

We berekenen nu de convolutie

$$x_+^{\lambda-1} * x_+^{\mu-1}.$$

Onderstellen we $\lambda > 0$, $\mu > 0$, dan vinden we voor die convolutie de integraal

$$\int_0^x u^{\lambda-1}(x-u)^{\mu-1}\,\mathrm{d}u, \quad x > 0,$$

die door de substitutie $u = xv$ overgaat in

$$x^{\lambda+\mu-1}\int_0^1 v^{\lambda-1}(1-v)^{\mu-1}\,\mathrm{d}v = x^{\lambda+\mu-1}\,\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}.$$

Het ligt nu voor de hand de functie

$$\boxed{\omega_\lambda(x) = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}} \tag{13–9}$$

in te voeren. Dan kunnen we het zo even verkregen resultaat schrijven als

$$\boxed{\omega_\lambda * \omega_\mu = \omega_{\lambda+\mu},} \tag{13–10}$$

dat voorlopig alleen voor $\lambda > 0$, $\mu > 0$ is bewezen. We merken verder op, lettende op de functionaalvergelijkingvoor de gammafunctie, dat

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\omega_\lambda}{\mathrm{d}x} = \omega_{\lambda-1},} \tag{13–11}$$

mits λ niet een negatief geheel getal is of 0. Door successieve differentiatie van (13 – 10) blijkt dan dat deze relatie voor alle waarden van λ en μ geldt, mits λ, μ en $\lambda + \mu$ niet 0 zijn of negatieve gehele getallen.

Het zal nu blijken dat deze uitzonderingsgevallen kunnen verdwijnen. Daartoe bewijzen we eerst

De distributie $x_+^{\lambda+1}$ convergeert zwak naar x_+ als $\lambda \to 0$.

Om dit te bewijzen maken we gebruik van een bekende ongelijkheid

$$\frac{y-1}{y} \leqq \log y \leqq y - 1, \quad y > 0. \tag{13–12}$$

Nemen we $y = x^\lambda$, dan levert de eerste ongelijkheid

$$x^\lambda - 1 \leqq \lambda x^\lambda \log x, \; x > 0$$

en dus

(13–13) $$x^{\lambda+1} - x \leqq \lambda x^{\lambda+1} \log x.$$

Zonder bezwaar mag $\lambda > -1$ worden aangenomen. Daar $x^{\lambda+1} \log x \to 0$ voor $x \to 0$, is het rechterlid van (13–13) begrensd in ieder interval $0 < x < a$, zodat bij $\varepsilon > 0$ een r bestaat zodanig dat

$$|x^{\lambda+1} - x| < \varepsilon$$

mits $|\lambda| < r$, uniform over een eindig interval. Dan is echter

$$\left| \int_0^\infty (x^{\lambda+1} - x)\varphi(x)\,dx \right| < \varepsilon \int_0^\infty |\varphi(x)|\,dx$$

waaruit het gestelde direct volgt.

Daar $\Gamma(\lambda + 2) \to \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$ voor $\lambda \to 0$ geldt ook

(13–14) $$\omega_{\lambda+2} \to x_+, \quad \lambda \to 0.$$

Aangezien men beide leden willekeurig vaak mag differentiëren en de processen van differentiatie en zwakke limietovergang verwisselbaar zijn, leiden we zonder moeite af

(13–15) $$\lim_{\lambda \to -n} \omega_\lambda = \delta^{(n)}, \; n = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots$$

zodat we mogen definiëren

(13–16) $$\boxed{\omega_{-n} = \delta^{(n)},} \quad n = 0 \quad 1, 2, \ldots$$

In het bijzonder vinden we uit (13–10) als we $\mu \to -\lambda$ laten gaan

(13–17) $$\omega_\lambda * \omega_{-\lambda} = \delta.$$

We zijn nu voldoende toegerust om afgeleiden van een willekeurige orde te definiëren. We merken op, dat

$$f * \omega_{-n} = f * \delta^{(n)} = f^{(n)},$$

zodat het voor de hand ligt om te definiëren

(13–18) $$\boxed{\frac{d^\mu f}{dx^\mu} = f^{(\mu)} = f * \omega_{-\mu}.}$$

In het bijzonder is dus

$$\frac{d^\mu \delta}{dx^\mu} = \delta * \omega_{-\mu} = \omega_{-\mu}.$$

Een bijzonder fraaie toepassing van de hier ontwikkelde theorie is de oplossing van de beroemde *integraalvergelijking van Abel*:

$$(13\text{–}19)\qquad f(x) = \int_0^x \frac{g(u)}{(x-u)^\alpha}\,du,\quad 0 < \alpha < 1,\quad f(x) = 0,\quad x \leqq 0.$$

De functie $f(x)$ is gegeven en we nemen aan dat $f(x)$ een integreerbare afgeleide bezit voor $x > 0$. De functie $g(x)$ is de gezochte functie. Neem nu aan dat er een voor $x > 0$ continue oplossing bestaat. We schrijven f als een convolutie

$$f(x) = g(x) * x_+^{-\alpha} = g(x) * \omega_{1-\alpha}\Gamma(1-\alpha),\quad (g(x) = 0,\quad x \leqq 0)$$

Daaruit volgt, wegens (13–11),

$$f'(x) = g(x) * \omega_{-\alpha}\Gamma(1-\alpha).$$

Passen we nu (13–17) toe, rekening houdend met het feit, dat de convolutie associatief is, dan vinden we

$$f'(x) * \omega_\alpha = g(x) * \delta\Gamma(1-\alpha) = g(x)\Gamma(1-\alpha),$$

of

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,f'(x) * \omega_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\,f'(x) * x_+{}^{\alpha-1}.$$

In de theorie van de gammafunctie bewijst men

$$(13\text{–}20)\qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

zodat we ten slotte hebben

$$(13\text{–}21)\qquad g(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x \frac{f'(u)}{(x-u)^{1-\alpha}}\,du,$$

de gezochte oplossing. Het is duidelijk dat deze functie continu is. Doordat we het betoog ook in omgekeerde richting kunnen voeren, is tevens de existentie van een oplossing van (13–19) bewezen.

Het verkrijgen van dit resultaat met de hulpmiddelen van de klassieke analyse alleen is een zeer moeizame aangelegenheid.

14. *Het Lemma van Riemann-Lebesgue.*

Een van de meest gebruikte hulpmiddelen in de toegepaste wiskunde is de transformatie van Fourier. De klassieke theorie stuit daarbij vaak op grote moeilijkheden omdat vele elementaire func-

ties geen getransformeerde bezitten. De theorie van de distributies geeft hierbij uitkomst.

We zullen een eenvoudige toegang tot de theorie der Fouriertransformaties schetsen, maar we willen niet nalaten te vermelden, dat een alleszins bevredigende theorie diepere hulpmiddelen vraagt, dan die welke wij zullen gebruiken.

Als uitgangspunt kiezen we een beroemde stelling, die het eerst geformuleerd is door Riemann en naderhand door Lebesgue gegeneraliseerd. Voor ons doel kunnen we echter met een elementair geval volstaan, waarvan het bewijs zeer eenvoudig is

Laat $\alpha(x)$ een overal differentieerbare functie zijn met locaal integreerbare afgeleide. Dan geldt over ieder eindig interval

$$(14\text{–}1) \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \alpha(x)\sin \lambda x\,dx = 0,$$

$$(14\text{–}2) \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \alpha(x)\cos \lambda x\,dx = 0.$$

Door partiële integratie vinden we

$$\int_a^b \alpha(x)\sin \lambda x\,dx = -\frac{\cos \lambda x}{\lambda}\,\alpha(x)\Big|_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \alpha'(x)\cos \lambda x\,dx.$$

Dus

$$\Big|\int_a^b \alpha(x)\sin \lambda x\,dx\Big| \leqq \frac{|\alpha(b)-\alpha(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |\alpha'(x)|\,dx,$$

en hieruit volgt het gestelde onmiddellijk. Op precies dezelfde manier bewijst men (14–2).

Uit deze stelling kunnen we een tweetal interessante gevolgtrekkingen maken. Vooreerst

De distributie

$$(14\text{–}3) \qquad \frac{\cos \lambda x}{x}$$

convergeert zwak naar nul voor $\lambda \to \infty$, dus

$$(14\text{–}4) \qquad \boxed{\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\cos \lambda x}{x} = 0.}$$

De distributie (14–3) is niet regulier, maar kan in analogie met (10–22) gegeven worden door

$$(14\text{–}5) \qquad \left\langle \frac{\cos \lambda x}{x},\ \varphi(x)\right\rangle = \int_0^\infty \cos \lambda x\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx.$$

Daar de factor van cos λx onder het integraalteken overal differentieerbaar is en de integraal in feite over een eindig interval wordt genomen, is het lemma van Riemann - Lebesgue direct van toepassing.

Meer moeite levert het bewijs van de stelling

De distributie

$$\frac{\sin \lambda x}{x} \tag{14–6}$$

convergeert zwak naar $\pi\delta$ voor $\lambda \to \infty$, dus

$$\boxed{\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} = \pi\delta.} \tag{14–7}$$

De distributie (14–6) is regulier en is gegeven door

$$\left\langle \frac{\sin \lambda x}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x. \tag{14–8}$$

Is $\varphi(x) = 0$ buiten het interval $|x| < a$, dan kunnen we voor (14–8) schrijven

$$\int_{-a}^{a} \sin \lambda x \, \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x + \varphi(0) \int_{-a}^{a} \frac{\sin \lambda x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

De eerste integraal voldoet aan de eisen gesteld door het lemma van Riemann – Lebesgue. Voorts is

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin \lambda x}{x}\, \mathrm{d}x = \int_{-a\lambda}^{a\lambda} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u, \text{ als } \lambda \to \infty,$$

waarbij de laatste integraal convergent is en, gelijk bekend, de waarde π bezit.

Dus

$$\left\langle \frac{\sin \lambda x}{x}, \varphi(x) \right\rangle \to \pi\varphi(0) = \pi\langle \delta, \varphi\rangle = \langle \pi\delta, \varphi\rangle,$$

waarmee het bewijs is voltooid.

15. *Het omkeertheorema van Fourier.*

Door middel van het voorschrift

$$\boxed{\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xp}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x} \tag{15–1}$$

kunnen we aan iedere toetsfunctie $\varphi(x)$ een functie van de (reële) variabele p toevoegen. Daar de integratiegrenzen rechts eindig zijn mogen we onder het integraalteken differentiëren, zodat $\psi(p)$ willekeurig vaak naar p differentieerbaar is. Evenwel is ψ niet finiet, maar gedraagt zich voor grote waarden van p toch zeer behoorlijk. We kunnen nl. bewijzen, dat *$\psi(p)$ voor $p \to \infty$ sneller naar nul gaat dan iedere gehele negatieve macht van p.* Dit blijkt onmiddellijk uit

$$\psi(p) = \langle e^{-2\pi i x p}, \varphi\rangle = \frac{-1}{2\pi i p}\left\langle \frac{d}{dx} e^{-2\pi i x p}, \varphi\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i p}\langle e^{-2\pi i x p}, \varphi'\rangle = \ldots = \frac{1}{(2\pi i p)^n}\langle e^{-2\pi i x p}, \varphi^{(n)}\rangle;$$

zodat

$$|\psi(p)| \leqq \frac{1}{(2\pi p)^n}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(n)}(x)|dx.$$

In het bijzonder is $|\psi(p)| < c/p^2$ zodat $\psi(p)$, en dus ook $e^{2\pi i x p}\psi(p)$ voor iedere x absoluut integreerbaar is voor $-\infty < p < \infty$. De omkeerstelling van Fourier zegt:

Is $\psi(p)$ de Fourier-getransformeerde (15–1) van de toetsfunctie $\varphi(x)$, dan is omgekeerd

(15–2) $$\boxed{\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x p}\psi(p)\, dp.}$$

Om dit te bewijzen beschouwen we de functie

$$\varphi_\lambda(x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2\pi i x p}\psi(p)dp = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2\pi i x p}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i u p}\varphi(u)\, du\right)dp$$

$$= \int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-u)p}\varphi(u)\, du\right)dp$$

Daar de integralen over eindige intervallen worden genomen kan men de volgorde van integratie verwisselen, zodat we krijgen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2\pi i(x-u)p}dp\right)\varphi(u)\, du.$$

Nu is

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2\pi i(x-u)p}dp = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\pi\lambda(x-u)}{x-u},$$

zodat

$$\varphi_\lambda(x) = \left\langle \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\pi\lambda(x-u)}{x-u}, \varphi(u)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\pi\lambda v}{v}, \varphi(x-v)\right\rangle.$$

Voor $\lambda \to \infty$ nadert dit tot $\langle\delta(v), \varphi(x-v)\rangle = \varphi(x)$, waarmee het bewijs is geleverd.

16. *De Fourier-transformatie van een distributie.*

Is $f(x)$ een van $-\infty$ tot ∞ absoluut integreerbare functie, dan bestaat de integraal

$$g(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} f(x)\, dx, \tag{16—1}$$

die de *Fourier-getransformeerde* van f wordt genoemd. Een locaal integreerbare functie behoeft reeds geen getransformeerde te bezitten, b.v. de functie 1 niet, want de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} dx \tag{16–2}$$

is divergent. Het is echter mogelijk met behulp van de theorie der distributies een bevredigende definitie op te stellen. De weg wordt gewezen door de stelling van Parseval, die aldus luidt:

Is $f(x)$ absoluut integreerbaar over de gehele getallenrechte en voorts $\psi(p)$ de Fourier-getransformeerde van de toetsfunctie $\varphi(x)$, dan geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\psi(p)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(-x)\, dx. \tag{16–3}$$

De integraal in het rechterlid bestaat natuurlijk, want f is stellig locaal integreerbaar. Uit (16–1) volgt

$$|g(p)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

zodat $g(p)$ begrensd is. Voorts is, gelijk we zagen, $|\psi(p)| < c/p^2$, zodat de integraal links in (16–3) ook betekenis heeft. Met gebruikmaking van (15–2), waar we nu x door $-x$ vervangen, vinden we voor het rechterlid van (16–3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p}\psi(p) dp\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} f(x)\psi(p) dp\right) dx.$$

Daar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)| |p$$

eindig zijn en voorts

$$|f(x)e^{-2\pi i x p}\psi(p)| \leqq |f(x)||\psi(p)|$$

mag men volgens een bekend criterium de volgorde der integratie omkeren en we vinden

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} f(x)\psi(p)\, dx\right) dp = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} f(x)\, dx\right)\psi(p)\, dp.$$

Daarmee is echter het bewijs geleverd.

We merken nu het volgende op. De getransformeerden (15–1) van de toetsfuncties φ vormen kennelijk een lineaire vectorruimte, die we met Ψ zullen aanduiden. Het is dus weer mogelijk om over Ψ lineaire functionalen te definiëren. We zullen voorts zeggen dat ψ_λ, de getransformeerde van φ_λ, sterk naar nul convergeert, als $\varphi_\lambda \to 0$ in de zin, die we daaraan hebben gegeven in no. 8. De continue lineaire functionalen over Ψ noemen we weer distributies, zij het dan van een enigszins ander karakter dan die over Φ. Overigens is het niet moeilijk de eigenschappen van de distributies over Φ op die over Ψ over te dragen. Soms is het nodig de bewijzen passend te modificeren en in een enkele maal ook de begrippen. Een reguliere functionaal

(16–4) $$\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\psi(p)\, \mathrm{d}p$$

is nu gegeven door een functie g, waarvoor $(1 + p^2)^{-N}g(p)$ absoluut integreerbaar is voor een passende N.

In (16–3) staat links een lineaire functionaal over Ψ en rechts een lineaire functionaal over Φ. Dit brengt ons er toe te definiëren:

Is $f(x)$ een distributie over Φ, dan is de Fourier-getransformeerde van f de lineaire functionaal g over Ψ bepaald door

(16–5) $$\boxed{\langle g(p),\ \psi(p)\rangle = \langle f(x),\ \varphi(-x)\rangle.}$$

Het is gemakkelijk in te zien dat deze functionaal continu is, d.w.z. $\langle g, \psi_\lambda\rangle \to 0$ voor $\psi_\lambda \to 0$ in de boven aangegeven betekenis. We zullen schrijven

(16–6) $$g = F[f].$$

17. *Voorbeelden en rekenregels.*

Door toepassing van (16–5) kunnen we in eenvoudige gevallen gemakkelijk de getransformeerden op het spoor komen. Nemen we eerst de distributie δ. Nu is

$$\langle \delta, \varphi(-x)\rangle = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i 0 p}\psi(p)\,\mathrm{d}p$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p)\,\mathrm{d}p = \langle 1, \psi(p)\rangle$$

Dus

(17–1) $$\boxed{F[\delta] = 1.}$$

De Fourier-getransformeerde van de distributie 1 vinden we uit

$$\langle 1, \varphi(-x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x 0}\varphi(x)\,dx = \psi(0),$$

zodat

(17–2) $$\boxed{F[1] = \delta,}$$

waarbij in dit geval natuurlijk rechts de distributie van Dirac staat voor de ruimte Ψ.

Men schrijft Fourier-getransformeerden vaak symbolisch als integralen, analoog aan (16–1). Dan verschijnt (17–2) als

(17–3) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p}dx = \delta(p),$$

waarmee aan (16–2) betekenis is gegeven.

Belangrijke hulpmiddelen zijn de *differentiatieregels*:

Is g de getransformeerde van f, dan is $2\pi i p g$ de getransformeerde van f':

We merken op dat

$$\langle f', \varphi(-x)\rangle = \langle f, \varphi'(-x)\rangle.$$

We zullen daarom de getransformeerde van φ' moeten zoeken. Uit

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p}\varphi(x)dx = \frac{-1}{2\pi i p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-2\pi i x p}\varphi(x)\,dx$$

volgt

$$2\pi i p \psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p}\varphi'(x)\,dx.$$

Dus als

(17–4) $$\langle g(p), \psi(p)\rangle = \langle f(x), \varphi(-x)\rangle$$

dan is

$$\langle g(p), 2\pi i p\psi(p)\rangle = \langle f'(x), \varphi(-x)\rangle.$$

Het linkerlid is evenwel

$$\langle 2\pi i p g(p), \psi(p)\rangle$$

en daarmee is de stelling bewezen.

Duaal geldt

Is g de getransformeerde van f, dan is g' de getransformeerde van $-2\pi i x f$.

We gaan uit van

$$\langle -2\pi i x f,\ \varphi(-x)\rangle = \langle f,\ -2\pi i x \varphi(-x)\rangle$$

en we zoeken de getransformeerde van $2\pi i x\varphi(x)$. Welnu, uit (15–1) volgt door differentiatie naar p:

$$\psi'(p) = -\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i x\, e^{-2\pi i x p}\varphi(x)\, dx,$$

zodat $-\psi'(p)$ de getransformeerde is van $2\pi i x\varphi(x)$. Uit (17–4) volgt nu

$$\langle g(p),\ -\psi'(p)\rangle = \langle -2\pi i x f(x),\ \varphi(-x)\rangle$$

en het linkerlid is $\langle g'(p),\ \psi(p)\rangle$.

Uit (17–1) volgt nu direct

(17–5) $$F[\delta'] = 2\pi i p.$$

Uit (17–2) leiden we af

(17–6) $$F[x] = \frac{-\delta'}{2\pi i}.$$

Daar

$$\frac{d \operatorname{sign} x}{dx} = 2\delta(x),$$

is

$$2 = 2F[\delta] = F[2\delta] = F\left[\frac{d \operatorname{sign} x}{dx}\right] = 2\pi i p\, F[\operatorname{sign} x],$$

zodat

$$F[\operatorname{sign} x] = \frac{1}{\pi i p} + c\delta.$$

Vervangen we in al onze formules x door $-x$, dan moet p door $-p$ worden vervangen. Nu is sign $(-x) = -$ sign x, maar $\delta(-p) = \delta(p)$, waaruit volgt, dat de constante c in (17–6) gelijk is aan nul. Daarmee is gevonden

(17–7) $$\boxed{F[\operatorname{sign} x] = \frac{1}{\pi i p}.}$$

Voorts is

$$H(x) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sign} x + 1)$$

dus, in verband met (17–7) en (17–2),

(17–8) $$F[H(x)] = \frac{1}{2\pi i p} + \tfrac{1}{2}\delta(p).$$

Schrijven we dit formeel als integralen, dan hebben we

$$F[H(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} dx = \int_0^{\infty} \cos 2\pi p x \, dx - i \int_0^{\infty} \sin 2\pi p x \, dx,$$

zodat aan de divergente integralen

(17–9) $$\int_0^{\infty} \cos 2\pi x p \, dx = \tfrac{1}{2}\delta(p)$$

en

(17–10) $$\int_0^{\infty} \sin 2\pi x p \, dx = \frac{1}{2\pi p}$$

betekenis kan worden gegeven.

Daar

$$1 = -2\pi i x \frac{1}{-2\pi i x},$$

is

$$\delta(p) = F[1] = \frac{d}{dp} F\left[\frac{1}{-2\pi i x}\right],$$

dus

$$\frac{d}{dp} F[x^{-1}] = -2\pi i \delta(p) = -\pi i \frac{d \operatorname{sign} p}{dp}.$$

zodat

$$F[x^{-1}] = -\pi i \operatorname{sign} p + c$$

Vervangen we x door $-x$, dan moet p door $-p$ worden vervangen en we zien dat $c = 0$. Dus

(17–11) $$F[x^{-1}] = -\pi i \operatorname{sign} p.$$

Schrijven we dit als een integraal kan komt er

(17–12) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi p x}{x} dx = \pi \operatorname{sign} p,$$

een bekend resultaat.

KORREL CXXIX

Gebruik nu transformaties!

Nr. 194 van de wiskundige opgaven van het Wiskundig Genootschap lost de auteur, de heer A. van Tooren, op door gebruik te maken van complexe getallen. Met een voor de hand liggende uitbreiding van de methoden, ontwikkeld in Yaglom, *Geometric transformations* — dit boek is de basis voor de heroriënteringscursus in september a.s. — kan het vraagstuk als volgt worden opgelost.

Het probleem luidt aldus: *Op de zijden van $\triangle ABC$ beschrijft men buitenwaarts driehoeken met hoeken x, y en z als in de figuur is aangegeven. Gevraagd wordt of het mogelijk is de constanten x, y, en z zodanig te kiezen, dat de vorm van $\triangle PQR$ onveranderlijk is bij variatie van de vorm van $\triangle ABC$.*

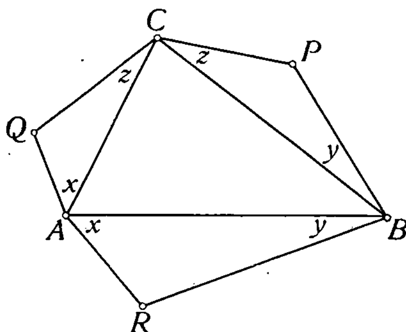


Fig. 1.

De hoeken x, y, en z moeten scherp zijn, want als b.v. z stomp was, zouden we $\angle C = 360° - 2z$ kunnen nemen en bovendien het hoekpunt zodanig kunnen kiezen, dat de deellijn van $\angle C$ door R gaat. Dan komen echter P, Q en R alle op deze deellijn.

We zoeken nu eerst een noodzakelijke voorwaarde en laten daartoe C langs de hoogtelijn CC' bewegen, tot C in C' komt. Zie fig. 2.

In de limietstand vallen AC en BC langs AB, terwijl AQ en BP elkaar snijden in het punt E, spiegelpunt van R t.o.v. AB. We onderstellen nog bovendien, dat C zo gekozen is, dat $\angle EC'A = z$. Dan valt P op het verlengde van RC', terwijl E met Q samenvalt. Van $\triangle PQR$ is de invariante $\angle R$ dan gelijk $\angle R_1 = 90 - z$ graden.

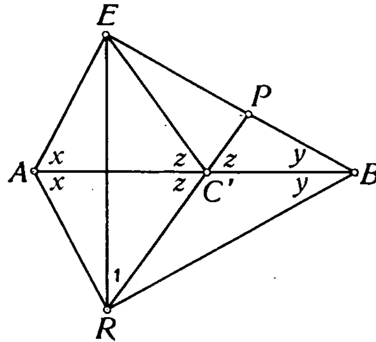


Fig. 2.

Evenzo volgt voor de andere hoeken: $90 - x$ en $90 - y$ graden. Samen zijn de hoeken 180°, dus is $x + y + z = 90°$.

We bewijzen nu dat deze noodzakelijke voorwaarde tevens voldoende is.

We werken met fig. 1 en voeren de volgende notatie in: $r = r(R;\, 180 - x - y;\, \sin x/\sin y)$ betekent een draaiing van het vlak om R, rechtsom over een hoek van $180 - x - y$ graden, gevolgd door een vermenigvuldiging met de verhouding $\sin x : \sin y$ t.o.v. R. Daar $BR : AR = \sin x : \sin y$, volgt dat A door r in B overgaat. We schrijven: $r(A) = B$. Analoog: $p = p(P;\, 180 - y - z;\, \sin y/\sin z)$; $q = q\ (Q;\, 180 - z - x;\, \sin z/\sin x)$. Dus: $pr(A) = p(B) = C$ en ten slotte: $qpr(A) = q(C) = A$. Door r worden alle lijnstukken in het vlak over een hoek van $180 - x - y$ gedraaid en vergroot in de verhouding $\sin x : \sin y$. Door qpr worden alle lijnstukken gedraaid over de hoek: $(180 - x - y) + (180 - y - z) + (180 - z - x) = 360°$ en vergroot in de verhouding:

$$\frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{\sin y}{\sin z} \cdot \frac{\sin z}{\sin x} = 1.$$

Daar bovendien A invariant is, is de resulterende beweging de identiteit. Daar $q(Q) = Q$ is, moet reeds $pr(Q) = Q$ zijn.

We stellen eerst nog even $x \neq z$, dan is er hoogstens één punt, dat bij de beweging pr op zijn plaats terugkomt; stel n.l. dat er een tweede punt X was, dan zou de afstand QX invariant zijn, terwijl pr een vergroting $\sin x : \sin z$ geeft.

We tekenen nu figuur 3 en bewijzen dat X invariant is bij pr. Allereerst is $\angle XRY = 90° + z = 180° - x - y$; verder is: $RY : PR = \sin 2x : \sin 2y$; $PR : XR = \cos y : \cos x$ en dus: $RY : RX = \sin x : \sin y$. Dus is $r(X) = Y$; evenzo volgt: $p(Y) =$

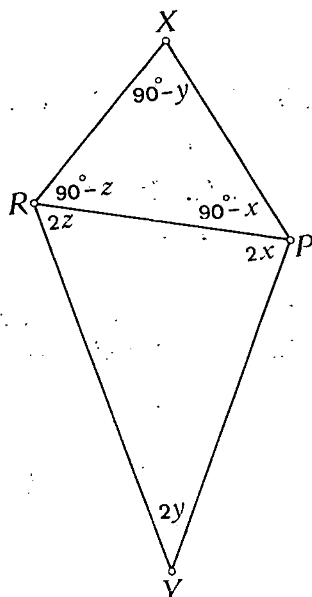


Fig. 3.

X. Dus X is invariant; dus $X = Q$ en de hoeken van $\triangle PQR$ zijn $90° - x$, $90° - y$ en $90° - z$. Als $x = z \neq y$ dan beginnen we met p in plaats van met r.

Als $x = y = z$, dan is de beweging pr een draaiing om een punt X, zodanig, dat $\triangle PRX$ gelijkzijdig is, terwijl X aan dezelfde kant van PR ligt, als Q. Daar dan de hoeken x, y en z alle 30° zijn, volgt weer, dat de hoeken van $\triangle PQR = 90° - x$ enz. zijn.

P. BRONKHORST

Naschrift

Prof. N. G. de Bruyn, aan wie ik een kopie van deze korrel zond, deelde mij mee, dat Mevr. B. C. Dijkstra-Kluyver indertijd een oplossing van nr. 194 inzond, die ook meetkundige transformaties tot basis had.

P. BRONKHORST

ELASTIEKJES-MEETKUNDE

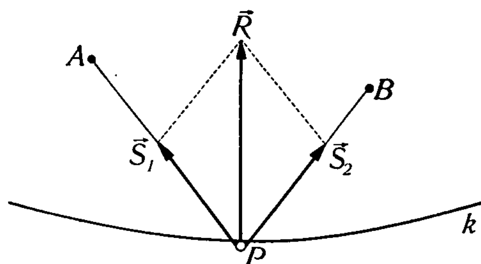
door

A. H. Nicolai

Groningen

Enkele aardige voorbeelden van wat men zou kunnen noemen elastiekjes-meetkunde behandel ik wel eens in de klas.

a)



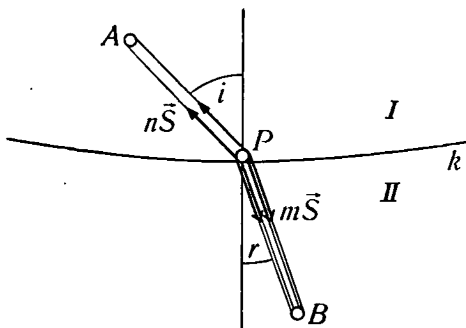
We beschouwen twee vaste punten A en B aan dezelfde kant van een vlakke kromme k. Langs k kan een massaloos punt P wrijvingsloos bewegen. We bevestigen de uiteinden van een „ideaal" elastiekje, dat niet te lang is, aan A en B en slaan het vervolgens om P. Het elastiekje wordt verondersteld wrijvingsloos langs P te kunnen glijden. Dan zal het elastiekje zich zo trachten in te stellen, dat zijn lengte zo klein mogelijk is. De eindstand van P langs k is dus zodanig, dat APB een minimum is ten opzichte van de ligging van van P op k.

Stel de spankrachten, welke werkzaam zijn in het elastiekje langs PA en PB zijn $\vec{S}_1$ en $\vec{S}_2$, waarvoor uiteraard geldt $|\vec{S}_1|=|\vec{S}_2|$. Het parallellogram van krachten beschreven op $\vec{S}_1$ en $\vec{S}_2$ wordt dus een ruit, zodat de diagonaal $\vec{R}$ de hoek APB halveert. Daar P in rust is zal $\vec{R}$ geen component langs k kunnen hebben, zodat $\vec{R}$ de normaal op k in het punt P is.

Denkt men zich nu een lichtstraal gaande van A naar B via P dan kan men de hoeken bij P hoek van inval en hoek van terugkaatsing noemen. Bij de kortste afstand APB (P op k) geldt dan, dat de hoek van inval gelijk is aan de hoek van terugkaatsing.

Het *principe van Fermat* is aldus bewezen voor terugkaatsing.

b) We kunnen iets soortgelijks doen voor lichtgang door twee media *I* en *II*.



Daartoe nemen we de vaste punten A en B aan weerszijden van de vlakke kromme k. Stel de brekingsindex van I naar II gelijk aan een *rationaal* getal $\frac{m}{n}$ (in de figuur is als voorbeeld genomen $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$, dus $m = 4$ en $n = 2$). Eenvoudigheidshalve nemen we m en n even, hetgeen natuurlijk mogelijk is door m en n indien nodig te vermenigvuldigen met 2.

We bevestigen het elastiekje aan P, slaan het om A, daarna weer om P, daarna om A, enz. totdat tussen A en P n stukjes elastiek gespannen zijn. Daar n even is eindigen we de bewerking bij P. Vervolgens wordt het elastiekje om B geslagen, daarna om P, daarna om B, enz. totdat tussen B en P m stukjes elastiek gespannen zijn. Het eindpunt van het elastiekje bevestigen we aan P. We nemen weer aan, dat P wrijvingsloos langs k kan bewegen, en dat het elastiekje ook wrijvingsloos rond A, P en B kan bewegen.

Het elastiekje zal P zodanig langs k plaatsen, dat het weer zo kort mogelijk is, dat wil zeggen, dat

$$nPA + mPB$$

een minimum is voor naburige wegen APB. Beweegt een punt (of een lichtstraal) zich met een snelheid v_1 van A naar P, en daarna met een snelheid $v_2 = \frac{n}{m} v_1$ van P naar B, dan is de tijd, waarin het de afstand APB aflegt

$$t = \frac{PA}{v_1} + \frac{PB}{v_2} = \frac{PA}{v_1} + \frac{mPB}{nv_1} = \frac{nPA + mPB}{nv_1}$$

en dit is weer een minimum.

Van P naar A werken nu n spankrachten $\vec{S}$, van P naar B werken m spankrachten $\vec{S}$. P is in rust als de *tangentiële* componenten der spankrachten in P elkaar opheffen. Noemen we i de hoek tussen PA en de normaal in P op k, en noemen we r de hoek tussen PB en deze normaal, dan geldt in geval van evenwicht

$$n|\vec{S}| \sin i = m|\vec{S}| \sin r,$$

of wel

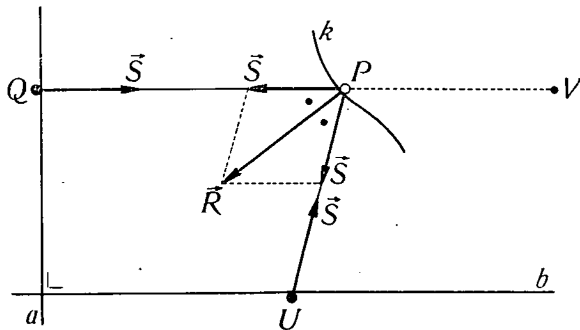
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{m}{n}.$$

De *normale* componenten van $\vec{S}$ hebben geen invloed op onze beschouwing. Dit kan men inzien door bijvoorbeeld aan k te denken als een goot, waarin P wrijvingsloos beweegt.

Voor de kortste weg in twee media, waarin een punt (of een lichtstraal) zich van A via k naar B beweegt met snelheden, die zich verhouden als $m : n$ geldt dus $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{m}{n}$.

Ook als de brekingsindex een *irrationaal* getal is gaat deze regel op, omdat ieder irrationaal getal willekeurig dicht te benaderen is door een rij rationale getallen, waarvoor de stelling steeds opgaat.

c)



We beschouwen weer een vlakke kromme k, een rechte a en een rechte b, welke loodrecht op a staat. Een elastiekje wordt bevestigd aan een punt Q, dat wrijvingsloos langs a kan bewegen. Het elastiekje wordt gespannen loodrecht op a en daarna geslagen rond een punt P, dat wrijvingsloos langs k kan bewegen. Vervolgens wordt het bevestigd aan een punt U, dat wrijvingsloos langs b kan bewegen.

We plaatsen U zodanig langs b, dat de resultante van de twee spankrachten $\vec{S}$ in het elastiekje bij P loodrecht op k staat. Automatisch geldt dan, dat de hoeken van inval en terugkaatsing bij P gelijk zijn.

We geven nu QP een kleine verplaatsing, er voor zorgend, dat QP steeds evenwijdig aan b blijft, terwijl we U daarbij over een zodanige afstand ds langs b schuiven, dat de normaal in P op k steeds samenvalt met de resultante der spankrachten bij P. Daar de spankracht $\vec{S}$ bij Q loodrecht op a staat en daar we er voor zorgen, dat de resultante der twee spankrachten $\vec{S}$ bij P steeds loodrecht op k staat wordt er bij P en Q geen arbeid verricht. De enige arbeid, welke verricht wordt, is bij U, ter grootte

$$\vec{S} \circ \vec{ds},$$

welke dient ter vergroting van de energie van het elastiekje

$$|\vec{S}|\, dl,$$

indien dl de lengtetoename van het elastiekje ten gevolge van de verplaatsing voorstelt, zodat

$$\vec{S} \circ \vec{ds} = |\vec{S}| dl.$$

Hierbij is dus ds = 0, dan en slechts dan indien tevens dl = 0. Het punt U blijft in dit geval dus op zijn plaats. Dat betekent voor lichtstralen, welke evenwijdig aan b op k vallen, dat zij na terugkaatsing alleen dan door *één* punt gaan, indien de af te leggen *optische weglengten* voor alle lichtstralen dezelfde zijn.

Om hieruit de meetkundige konsekwenties voor k te trekken verlengen we QP met een stuk $PV = PU$. Daar nu voor alle wegen QPU (waarbij QP evenwijdig is aan b) geldt, dat QPU constant is, zal eveneens QPV constant zijn. Beweegt dus QP evenwijdig aan b, dan zal het punt V een rechte beschrijven evenwijdig aan a en dus loodrecht op b. Voor de punten P geldt dus, dat zij evenver afliggen van het vaste punt U als van de vaste rechte beschreven door de punten V. P beschrijft dan een *parabool.*

Degene, die dit soort trucjes nog niet kende, denke niet, dat hiermee het arsenaal van de elastiekjes-meetkunde uitgeput is. Men kan er nog heel wat meer mee doen. Voor het grootste deel komt men dan echter buiten de gewone schoolmeetkunde. Zo kan het gedrag van een elastiekje verhelderend werken bij sommige gedeelten uit

de differentiaal-meetkunde als men het heeft over normalen, binormalen, geodetische krommen op een oppervlak enz. Men kan er dunkt me niet op serieuze wijze de meetkunde mee beoefenen, maar verlevendigend vind ik ze wel. Ook de aangehaalde voorbeelden bevatten een element van verrassing; dat merkt men duidelijk als men ze in de klas behandelt. De leerlingen hebben aanvankelijk het gevoel bij de neus te worden genomen, en zo iets is recreatief genoeg voor beide kanten.

Naschrift

Het boekje van L. A. Ljoesternik, *Kratsjaisjie linii*, bevat veel voorbeelden, waar het elastiekje de hoofdschotel vormt. Het is inmiddels in een vertaling onder de naam „*Shortest Paths*" verschenen bij de Pergamom Press, Oxford. Ten rechte recenseerde Dr. Vredenduin dit in het *Nieuw Archief* als „een lust om te lezen". De Engelse vertaling kost 17/6 sh. dus een gulden of acht (het oorspronkelijke Russische boekje kostte mij destijds 40 cent!). De benodigde voorkennis is praktisch nihil. U zult er mijn eerst genoemde voorbeeld in aantreffen. Verder staan er leuke voorbeelden in over kortste lijnen op kegeloppervlakken, die, zoals mij gebleken is, ook bij leerlingen van een vierde klas zeer in de smaak vallen. Alleen moet u dan niet, zoals ik deed, de pret bederven door achteraf te vertellen, dat het niets met het eindexamen te maken heeft. Het heeft trouwens wel iets te maken met de Wiskundeolympiade (opgave 2 van dit jaar).

BOEKBESPREKING

Invloeden van de moderne ontwikkeling van de exacte wetenschappen op mens en maatschappij. (Beknopt verslag van het 15e congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen). J. B. Wolters, Groningen, f 1,90.

Een bespreking van de inhoud van dit geschrift heeft m.i. weinig zin. Het bevat het kort verslag van een achttal voordrachten, waarvan er twee op wiskundig terrein zijn.

1. De betekenis van de wiskunde voor de moderne industrie (Prof. Dr. R. Timman).
2. Enkele vaak toegepaste wiskundige methodieken (Dr. C. P. S. van Oosten).

Na lezing van deze verslagen houdt men de indruk over, dat hier belangrijke dingen zijn gezegd. In beide mankeren — het waren immers voordrachten voor leraren — de suggesties betreffende andere stof voor het middelbaar onderwijs niet. De nadruk van het onderwijs zal, althans in de hogere klassen — zegt Dr. van O. — moeten vallen op algebra en in iets mindere mate op de analytische meetkunde; dit ten koste van de stereometrie.

Met deze stelling kan ik het wel eens zijn. Wel vraag ik mij af — en niet alleen voor deze suggesties, maar ook voor andere — over welk soort middelbaar onderwijs men het eigenlijk heeft. Ik dacht, dat daartoe eerst de nieuwe wet in praktijk gebracht moest worden en neem aan dat zulks ook de bedoeling is van alle goede wenken. We behoeven echt niet te proberen aan nog meer ongeschikte lieden nog meer wiskunde te leren; er zijn er nu al genoeg, die er weinig van nodig hebben tot zij hun kinderen bij hun huiswerk gaan helpen — en dan natuurlijk ontdekken, dat zelfs de wiskunde hun wiskunde niet meer is.

Ook de niet-wiskundige onderwerpen komen mij belangwekkend voor.

Groenman

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op donderdag 2 september 1965 om 15.00 uur in Gebouw „Op Gouden Wieken", Scheveningesweg 37, Scheveningen.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 9 van 30 okt. 1964 en in Euclides nr. VIII van 1 mei 1965).
3. Verslag kascommissie.
4. Bestuursverkiezing.
   a. Aan de beurt van aftreden is Dr. P. G. J. Vredenduin, die zich herkiesbaar stelt.
   b. Voorstel om het bestuur uit te breiden. (Indien dit voorstel wordt aangenomen, stelt het bestuur kandidaat: Drs. M. Koksma, Amsterdam en Dr. Th. J. Korthagen, Zutphen.)
   Tegenkandidaten kunnen vóór 26 augustus a.s. worden opgegeven bij de secretaris.
5. Voordracht door de heer Drs. C. J. J. van der Maas, Schiedam, over: „*Betekenis van de biolobgie voor de mensheid*".
   Pauze.
6. Voordracht door de heer Dr. W. A. M. Burgers, Wassenaar, over: „*Groepen van eindige orde. Een didactisch experiment*".
7. Rondvraag.
8. Sluiting.

Delft, Thorbeckestraat 47. D. Leujes, *secretaris*

WIMECOS

De penningmeester herinnert eraan dat de contributie met ingang van het nieuwe verenigingsjaar (1 sept.-31 aug.) *f* 9,00 bedraagt. Betaling door overschrijving op postrekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam is nu reeds mogelijk.

BERICHTEN

MATHEMATISCH CENTRUM

Voorlopig bericht over Vakantiecursus 1965

Vakantiecursus op maandag 30 en dinsdag 31 augustus te Amsterdam, alsook op dinsdag 31 augustus en woensdag 1 september te Eindhoven, voor wiskundeleraren en andere belangstellenden. Plaats nader te bepalen.

Als centraal onderwerp is gekozen „*Getallentheorie*", waarover de volgende voordrachten zullen worden gehouden.

1. Prof. dr. P. Mullender (Amsterdam V.U.): Meetkunde der getallen.
2. Prof. dr. A. F. Monna (Utrecht): p-adische getallen.
3. Prof. dr. S. C. van Veen (Delft): Analytische getallentheorie.
4. Prof. dr. J. Popken (Amsterdam): Irrationaliteit en transcendentie.

Kosten voor deelneming *f* 5,—, dagelijkse lunch *f* 2,50.

Opgeven vóór 15 juli bij de Administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, tel. (020)-947272.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

136. In een dorp teelt het verenigingsleven welig. Er zijn vele verenigingen en de burgers zijn graag lid. Dit alles echter met de volgende restricties:

1e. elk tweetal verenigingen heeft hoogstens één gemeenschappelijk lid,

2e. elk drietal verenigingen bevat minstens één disjunct paar.

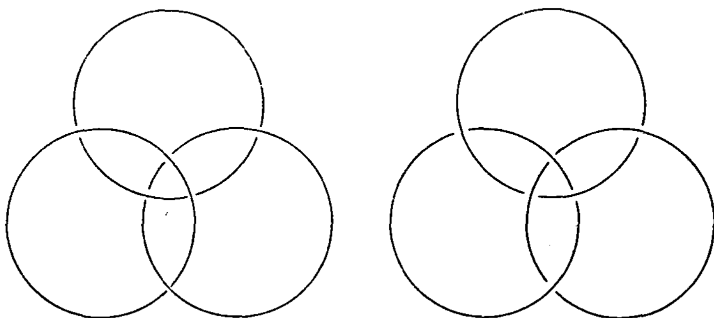
Op een mooie avond staan vier dorpelingen met elkaar het verenigingsleven te bepraten. Ze gaan na, in hoeverre ze van dezelfde verenigingen lid zijn. Het blijkt dat a en b lid zijn van eenzelfde vereniging, a en c ook, a en d ook, b en c ook en b en d ook. Een vijfde dorpeling, die het gesprek gevolgd heeft, zegt: Maar dan zijn c en d natuurlijk ook lid van eenzelfde vereniging. Had hij gelijk? (Uit Bourbaki, Théorie des ensembles; ingezonden door A. F. van Tooren)

137. We beschouwen n^2 punten, die t.o.v. een rechthoekig assenstelsel gehele coördinaten (x, y) hebben, waarin $0 \leqq x \leqq n - 1$ en $0 \leqq y \leqq n - 1$. Gevraagd wordt deze te verbinden door een gebroken lijn, die uit $2n - 2$ lijnstukken bestaat. (B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

134. Er zijn slechts drie verschillende mogelijkheden. Het kan, dat elke ring met elke andere verbonden is. Dit geval is weergegeven in de bij de opgave gevoegde figuur. Verder is nog mogelijk, dat twee ringen verbonden zijn met de derde, maar niet onderling (het principe van de sleutelring). En ten slotte is het mogelijk, dat geen enkel paar verbonden is, maar dat ze desondanks alle drie samenhangen. Dit laatste lijkt wonderlijk, maar als men het met een paar touwtjes probeert, ziet men de juistheid gemakkelijk in.



135. De derdemachten zijn:

onder 500: 27, 64, 125, 216, 343;
boven 500: 512, 729, 1000.

Uit de laatste vraag van D volgt, dat C geantwoord heeft resp. boven 500, geen kwadraat, wel een derdemacht. Dientengevolge is het huisnummer lager dan 500, wel een kwadraat en wel een derdemacht. Het is dus 64.